Die Formelsammlungen sind teilweise stark veraltet (Vorlesungsinhalte aus vergangenen Semestern, alte Normen...) und sollten lediglich als Hilfestellung zum Verfassen eigener Formelsammlungen dienen. Kontrolliert auf jeden Fall die Formeln, es haben sich auch Fehler eingeschlichen.

HM2 Formelsammlung

Jan Höffgen

21. April 2013

Diese Zusammenfassung wurde auf Basis der Vorlesung
Höhere Mathematik II für Bauingenieure
im Sommersemester 2011 erstellt.

Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit.
Fehler bitte der Fachschaft melden.

Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung

1.1 Grundrechenregeln Integrale

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b$
- $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad$ falls $\quad f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$

1.2 Stammfunktion

- F ist eine Stammfunktion zu f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$
- Menge aller Stammfunktionen: $\int f(x)dx = F_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

1.2.1 Grundintegrale

- $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \text{tanh}x + c,\ x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \text{coth}x + c,\ x \neq 0$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tan}x + c,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cot}x + c,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin}x + c = -\text{arccos}x + c,\ x \in (-1, 1)$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctan}x + c\ x, \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arsinh}x + c,\ x \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{arcosh}x + c,\ x \in (1, \infty)$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\text{arcosh}(-x) + c,\ x \in (-\infty, -1)$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{artanh}x + c,\ x \in (-1, 1)$

1.3 Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen

- $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right)' = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$

1.4 Partielle Integration

- $\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$

1.5 Integration durch Substitution

1.5.1 Die erste Substitutionsregel

- $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(z)dz = F(z) + c = F(g(x)) + c$
- $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz = F(g(b)) - F(g(a))$

1.5.2 Die zweite Substitutionsregel

- $\int f(x)dx = \int \underbrace{f(g(u)) \cdot g'(u)}_{h(u)}du = H(u) + c = H(g^{-1}(x)) + c$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \underbrace{f(g(u)) \cdot g'(u)}_{h(u)}du = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a))$

1.6 Integration rationaler Funktionen

1. Überprüfung, ob f(x) echt gebrochen ist. Falls nicht: Polynomdivision
2. Partialbruchzerlegung durch (reelle und komplexe) Nullstellen und Koefizientenvergleich
3. Anwendung von Integrationsformeln
   - $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c, \quad A, \alpha \in \mathbb{R}\ bel.$
   - $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$ falls $x^2 + px + q$ keine reellen Nullstellen besitzt

1.7 Elementar integrierbare Funktionen

- r(z) rationale Funktion $\Rightarrow r(e^x)$ ist elementar integrierbar
  - Substitution: $z = g(x) = e^x, \quad dz = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dz}{z}$
- r(u,v) rationale Funktion $\Rightarrow$ verkettete Funktion $r(\sin x, \cos x)$ ist elementar integrierbar
  - Substitution: $z = g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\arctan z, \quad dx = \frac{2}{z^2+1}dz$
  - $\sin x = \frac{2z}{z^2+1}, \ \cos x = \frac{1-z^2}{z^2+1}$

1.8 Uneigentliche Integrale

- $\int_0^1 f(x)dx := \lim_{\epsilon \to o+} \int_\epsilon^1 f(x)dx$
- $\int_1^\infty f(x)dx := \lim_{c \to \infty} \int_1^c f(x)dx$
- $\left\{\begin{array}{c}\text{konvergiert}\\ \text{divergiert}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{der Grenzwert} \left\{\begin{array}{c}\text{existiert}\\ \text{existiert nicht}\end{array}\right\}$

1.8.1 Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

- Das Majorantenkriterium
  $|f(x)| \le g(x), x \in [a, b]$
  das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)dx$ sei konvergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ konvergiert
- Das Minorantenkriterium
  $f(x) \ge g(x) \ge 0, x \in [a, b]$
  das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)dx$ sei divergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ divergiert

1.9 Numerische Integration

- $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ Mittelpunktsregel
- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ Trapez-Regel
- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ Simpson-Regel
- besser: summierte Regeln auf Teilintervallen
- Genauigkeitsgrad MR, TR: 1, SR: 3

1.10 Anwendungsbereiche der Integralrechnung

1.10.1 Die Leibniz'sche Sektorformel

Gegeben: Kurve in Polarkoordinaten $K : r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta],\ \beta - \alpha \leq 2\pi$, f integrierbar und nichtnegativ über $[\alpha, \beta]$

- Flächeninhalt des eigeschlossenen Sektors $s = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$

1.10.2 Schwerpunkt eingeschlossener Flächen

- $F = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$
- $x_s = \frac{1}{F}\int_a^b x(g(x) - f(x))dx$
- $y_s = \frac{1}{2F}\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

1.10.3 Bogenlänge einer Kurve

- $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

1.10.4 Volumen von Rotationskörpern nichtnegativer Funktionen

- $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ bei Rotation um die x-Achse
  - $V = 2\pi y_S F$ mit y_S =y-Koordinate des Schwerpunkts
- $V = \pi\left|\int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(z))^2 dz\right| = \pi\left|\int_a^b x^2 f'(x)dx\right|$ bei Rotation um die z-Achse

1.10.5 Mantelfläche von Rotationskörpern nichtnegativer Funktionen

- $M = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

2 Funktionen mehrerer Veränderlicher

2.1 Grundbegriffe

- Reelle Funktion von $\vec{x}$: $z = f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{x} \in D_f$
- natürlicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^n$
- Wertebereich: $W_f = \{z = f(\vec{x}) | \vec{x} \in D_f\}$

2.1.1 Eindimensionale Schnittkurve

- Schneiden der Fläche $z = f(x, y)$ mit Ebene parallel zur $\left\{ \begin{array}{l} \text{y-z-Ebene } (x = c) \\ \text{x-z-Ebene } (y = c) \end{array} \right\}$ liefert eindimensionale Schnittkurve $\left\{ \begin{array}{l} K : g(y) = f(c, y),\ x \in D_g \\ K : h(x) = f(x, c),\ x \in D_h \end{array} \right\}$
- Formeln von Schnittkurven
  - Kreis mit Radius r und M(d,e): $(x - d)^2 + (y - e)^2 = r^2$
  - Ellipse mit Achsenschnittpunkten $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$
  - Hyperbel mit x-Achsenabschnitt ±a und Asymptoten $y = \pm\frac{b}{a}x$: $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$
  - Hyperbel mit y-Achsenabschnitt ±b und Asymptoten $y = \pm\frac{b}{a}x$: $(\frac{y}{b})^2 - (\frac{x}{a})^2 = 1$

2.1.2 Höhenlinien

- Höhenlinie zur Höhe c: Menge aller Punkte $(x, y) \in D_f$ mit $f(x, y) = c,\ c \in \mathbb{R}$

2.1.3 Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^n$

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \sqrt{(\vec{y} - \vec{x})^T \cdot (\vec{y} - \vec{x})}$
  - nichtnegativ
  - erfüllt die Dreiecksungleichung: $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{x}, \vec{z})$
  - verschiebungsinvariant: $d(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z}) = d(\vec{x}, \vec{y})$

2.1.4 Umrechnung kartesische Koordinaten ⇔ Zylinderkoordinaten ($P = (r, \varphi, \omega)$)

- $\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = \omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r}\ (\varphi \in [0, 2\pi),\ r > 0) \\ z = \omega \end{array} \right.$

2.1.5 Umrechnung kartesische Koordinaten ⇔ Kugelkoordinaten ($P = (r, \theta, \varphi)$)

- $\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\varphi \in [0, 2\pi)) \\ \cos\theta = \frac{z}{r} \quad (\theta \in [0, \pi],\ r > 0) \end{array} \right.$

2.2 Stetigkeit

2.2.1 Folgen im $\mathbb{R}^n$

- Eine (Punkt-)Folge $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ oder $\{\vec{x}\}_{k=1}^{\infty}$ im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge von unendlich vielen Punkten $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$
- Konvergenz gegen $\vec{x}^*$: $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0$
- Punktfolgen nur konvergent, wenn die Zahlenfolgen aller Komponenten konvergieren
- Beschränktheit: alle Punkte lassen sich von einer Kugel umschließen
  - Jede konvergente Folge ist beschränkt.
  - Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

2.2.2 Grenzwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher

- Grenzwert $c = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x})$ der Funktion f an der Stelle $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$ Jede Folge aus D_f mit $\vec{x}_k \to \vec{x}_0$ konvergiert gegen c
- Untersuchung in Polarkoordinaten: $\lim_{r\to 0,\ \varphi bel.} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
- Mehrere unterschiedliche Höhen in einem Punkt $\Leftrightarrow$ Grenzwert existiert nicht

2.2.3 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher

- $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \Leftrightarrow$ f ist stetig in $\vec{x}_0$
- Grundfunktionen stetig auf ihrem natürlichen Definitionsbereich
- Kompositionen und Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig

2.2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

- f stetig, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen $\Leftrightarrow$ f besitzt absolutes Minimum m und Maximum M
- ZWS: $f(\vec{x_1}) = m < M = f(\vec{x_2})$, $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ durch stetige Kurve $K : \vec{u} = \vec{g}(t),\ t_1 \le t \le t_2$ verbunden $\Leftrightarrow [m, M] \subseteq W_f$ (f nimmt jeden Wert zwischen m und M an)

2.3 Differenzialrechnung

- $z = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar an der Stelle $\vec{x}^*$ $\Leftrightarrow$ es gibt eine tangentiale Hyperebene $z = H(\vec{x}) = f(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j - x_j^*)$
  - im $\mathbb{R}^2$: $H : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
  - $\alpha_1 := f_x(x_0, y_0),\ \alpha_2 := f_y(x_0, y_0)$
- (totales) Differenzial von $f(\vec{x})$ im Punkt $\vec{x}^*$: $l(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$

2.3.1 Partielle Ableitungen

- Jede in $\vec{x}^*$ (total) differenzierbare Funktion ist in $\vec{x}^*$ bezüglich jeder Variablen partiell differenzierbar
- $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$, $f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$
- Partielles Ableiten durch Annahme aller Variablen, nach denen nicht abgeleitet wird, als konstant
- Differenziationsregel wie bei Funktionen einer Veränderichen
- $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$

2.3.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

- f in $\vec{x}^*$ differenzierbar $\Rightarrow$ f in $\vec{x}^*$ stetig
- f in $\vec{x}^*$ differenzierbar $\Rightarrow$ f ist bezüglich jeder Variablen partiell differenzierbar
- $f_{x_j}(\vec{x}^*)$ existieren in Umgebung $U(\vec{x}^*)$ und sind stetig in $\vec{x}^*$ $\Rightarrow$ f ist differenzierbar
- alle partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig $\Rightarrow$ f stetig differenzierbar

2.3.3 Der Gradient

- Gradient von f an der Stelle $\vec{x}^*$: grad $f(\vec{x}^*) = (f_{x_1}(\vec{x}^*)\ f_{x_2}(\vec{x}^*)\ ...\ f_{x_n}(\vec{x}^*))$ (Zeilenvektor)
- totales Differenzial: $df(\vec{x}^*) \cdot \vec{x} = \text{grad}f(\vec{x}^*) \cdot \vec{x}$
- Gleichung der Tangentialebene: $z = f(x_0, y_0) + \text{grad}f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$
  - Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$

2.3.4 Die Kettenregel

- $\frac{\partial}{\partial x_k} F(\vec{x}^*) = \text{grad}f(\vec{g}(\vec{x}^*)) \circ \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{g}(\vec{x}^*)$
  (partielle Ableitungen der Funktion $z = f(\vec{u}) = f(\vec{g}(\vec{x}))$ an der Stelle $\vec{x}^*$)

2.3.5 Die Jacobi-Matrix

- $J_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})\right) = \begin{pmatrix} \text{grad}f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \text{grad}f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$

2.4 Anwendungen der Differenzialrechnung

2.4.1 Die Richtungsableitung einer Funktion von zwei Veränderlichen

- Richtungsableitung von f im Punkt $P = (x_0, y_0)$ in Richtung $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ mit $\|\vec{h}\| = 1$:
  $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t}$
- Berechnung: Falls f differenzierbar: $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0) = \text{grad}f(x_0, y_0) \cdot \vec{h}$
- Richtung des steilsten Anstiegs ist Richtung des Gradienten
- Der Gradient an der Stelle (x_0, y_0) steht senkrecht auf der Höhenlinie im Punkt (x_0, y_0).
- Der Gradient an der Stelle (x_0, y_0, z_0) steht senkrecht auf der Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0)

2.4.2 Der Satz über implizite Funktionen

- Gegeben: Funktion $F(x, y)$, $(x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$. Es gelte:
  - $F(x_0, y_0) = 0$
  - F ist in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig differenzierbar
  - $F_y(x_0, y_0) \neq 0$
- Dann: Es gibt ein Intervall (a,b) mit $a < x_0 < b$ und genau eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, sodass gilt:
  - $f(x_0) = y_0$
  - $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
  - $f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$

2.4.3 Der Satz von Taylor

- $T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
- $T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)$

2.4.4 Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$

- $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - (J_f(\vec{x}^{(k)}))^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}^{(k)})$ konvergiert lokal gegen $\vec{x}^*$, wenn $\vec{f}$ in einer Umgebung von $\vec{x}^*$ zwei mal stetig differenzierbar ist und in $\vec{x}^*$ eine Nullstelle hat.

2.4.5 Extrema

- Notwendige Bedingung: Stationäre Punkte: $\text{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$
- Hinreichende Bedgingung: $D := f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ relatives Extremum in $\vec{x}_0$
  - $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Leftrightarrow$ Maximum
  - $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Leftrightarrow$ Minimum
- D<0: kein Extremum
- D=0: genauere Untersuchung erforderlich

2.4.6 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

- Auflösen der NB: Überführung in eine eindimensionale Extremwertaufgabe durch Auflösen der NB nach x oder y und Einsetzen in die Funktion
- Verwendung einer Parameterdarstellung der NB: Einsetzen der Parameterdarstellung in die Funktion führt zu eindimensionaler Extremwertaufgabe
- Verfahren von Lagrange: Besitzt $f(x,y)$ unter der NB $g(x,y) = 0$ ein Extremum im Punkt (x_0,y_0), so löst (x_0,y_0) das Gleichungssystem
  1. $f_x(x,y) + \lambda \cdot g_x(x,y) = 0$
  2. $f_y(x,y) + \lambda \cdot g_y(x,y) = 0$
  3. $g(x,y) = 0$

2.5 Kurvenintegrale erster Art

- Für J-Kurve $K : \begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix}, \ a \le t \le b$, und f auf K stückweise stetig:
  $\int_K f(x,y)ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}dt$
- $f \equiv$ Massendichte, $\int_K f(x,y)ds \equiv$ Masse
- Bogenlänge: $L = \int_K 1ds = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}dt$

2.6 Flächenintegrale

2.6.1 Integration über Rechteckbereiche

- Zwischen $z = f(x)$ und $R = [a,b] \times [c,d]$ eingeschlossenes Volumen:
  $V = \iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x,y)dy\right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x,y)dx\right) dy$

2.6.2 Integration über Normalbereiche

- Normalbereich bezüglich x: $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$
- Normalbereich bezüglich y: $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \ h_1(x) \le x \le h_2(x)\}$
- Zwischen $z = f(x)$ und N eingeschlossenes Volumen: $\iint_N f(x,y)d(x,y) = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx$

2.6.3 Flächeninhalt und Schwerpunkt von Normalbereichen

- Flächeninhalt: $F_N = \iint_N 1 d(x,y)$
- x-Koordinate des Schwerpunkts: $x_S = \frac{1}{F_N} \iint_N x d(x,y)$
- y-Koordinate des Schwerpunkts: $y_S = \frac{1}{F_N} \iint_N y d(x,y)$

2.6.4 Die Substitutionsregel im $\mathbb{R}^2$

- $\iint_M f(x,y) d(x,y) = \iint_N f(\vec{\psi}(u,v)) \cdot |det J_\psi(u,v)| d(u,v)$
  für eine auf einer kompakten Menge injektive, stetig differenzierbare Funktion $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(u,v) \\ \psi_2(u,v) \end{pmatrix}$ mit $det J_\psi(u,v) = det \left(\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(u,v)} \right) \neq 0$ und auf $M = \{(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)) | (u,v) \in N\}$ stetige Funktion z=f(x,y).
  - $det J_\psi(r,\varphi) = r$ für Polarkoordinaten, $det J_\psi(r,\varphi) = abr$ für $\vec{\psi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos\varphi \\ br\sin\varphi \end{pmatrix}$ (Ellipse)

2.6.5 Flächenintegrale 1. Art

- $\int_S f(\vec{x}) d\sigma = \iint_D f(\vec{\psi}(u,v)) \|\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v\| d(u,v)$: Flächenintegral 1. Art
  für beschränktes Gebiet $D \in \mathbb{R}^2$, auf D beschränkte, stetig differenzierbare, injektive Funktion $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1(u,v) \\ \psi_2(u,v) \\ \psi_3(u,v) \end{pmatrix}$ mit $\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v \neq 0$ und für f auf $S = \{\vec{\psi}(u,v) | (u,v) \in D\}$ stetig und beschränkt.
  - Flächeninhalt: $F_S = \int_S 1 d\sigma = \iint_D 1 \cdot \|\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v\| d(u,v)$

2.7 Mehrdimensionale Bereichsintegrale

2.7.1 Normalbereiche bezüglich der (x,y)-Ebene

- $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$ Normalbereich
  für beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand eine stetige, stückweise glatte geschlossene Jordan-Kurve ist, und auf D stetige Funktionen $z = g_1(x),\ z = g_2(x)$ mit $g_1 \leq g_2$

2.7.2 Berechnung von Integralen über Normalbereiche bezüglich der (x,y)-Ebene

- $\iiint_A f(x,y,z) d(x,y,z) = \iint_D (\int_{z=g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz) d(x,y)$